

# 具有动态事件触发机制的非线性时滞系统 规定时间控制<sup>\*</sup>

王向文<sup>1</sup> 操德文<sup>1,2</sup> 吴健<sup>1,2</sup>

(1. 安庆师范大学计算机与信息学院, 安庆 246133;

2. 安庆师范大学智能感知与计算安徽省高校重点实验室, 安庆 246133)

**摘要** 针对一类具有不确定时滞的非线性严格反馈系统, 研究其基于动态事件触发机制的规定时间控制问题. 根据规定时间稳定性定理, 对具有未知时滞的高阶非线性系统提出了一种状态反馈控制策略, 以保证系统在规定时间内收敛, 规定的时间可以根据实际需要设置. 文章利用神经网络逼近技术对未知的连续函数进行逼近, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函来补偿状态延迟的影响. 此外, 控制器通过引入动态事件触发机制, 减小了通信占用率. 文章设计的控制器使得闭环系统内所有的信号在给定的时间范围内保持有界稳定, 而且系统的收敛时间不会受到系统初始状态和控制参数的影响. 最后, 通过仿真实验来证明该设计方案的可行性.

**关键词** 规定时间稳定, 时滞, 动态事件触发机制, 不确定非线性系统, 状态反馈控制.

MR(2020) 主题分类号 93C10, 93D15

DOI 10.12341/jssms23793

## Prescribed-Time Control for Nonlinear Time Delay Systems via Dynamic Event-Triggered Mechanism

WANG Xiangwen<sup>1</sup> CAO Dewen<sup>1,2</sup> WU Jian<sup>1,2</sup>

(1. School of Computer and Information, Anqing Normal University, Anqing 246133;

2. University Key Laboratory of Intelligent Perception and Computing of Anhui Province, Anqing  
Normal University, Anqing 246133)

**Abstract** This study focuses on the prescribed-time control problem based on dynamic event-triggered mechanism for a class of nonlinear strict feedback systems with

\* 安徽省教育厅高校杰青项目 (2022AH020067), 安徽省自然科学基金项目 (2008085QF302), 高校优秀青年人才支持计划项目 (gxyq2021192) 资助课题.

收稿日期: 2023-11-09, 收到修改稿日期: 2024-03-18.

通信作者: 吴健, Email: jwu2011@126.com.

编委: 左宗玉.

uncertain time delays. A state feedback control strategy is proposed for the high-order nonlinear system with unknown time delays based on the prescribed-time stability theorem. It ensures the convergence of the system within the prescribed-time, and the prescribed-time can be set according to the actual needs. In order to approximate unknown continuous functions in the system online, neural network approximation technique is applied, while the Lyapunov-Krasovskii functionals (LKFs) are employed to compensate for the effect of state delay. In addition, by introducing a dynamic event-triggered mechanism, the controller reduces the communication occupancy rate. The designed controller makes all signals in the closed-loop system remain bounded and stable within the prescribed-time, and the convergence time of the system will not be affected by the initial state of the system and the control parameters. Finally, the feasibility of the design scheme is verified by simulation experiments.

**Keywords** Prescribed-time stability, time delays, dynamic event-triggered mechanism, uncertain nonlinear systems, state feedback control.

## 1 引言

在所需资源完全充足的情况下, 通常使用周期触发式的时间触发机制 (TTC) 设计控制器. 然而, 当系统逐渐稳定后, 控制信号几乎不变或者变化微小但仍被持续发送, 造成通信资源浪费. 因此, 事件触发控制 (ETC) 因其节省网络资源的优点得到了大量学者的研究<sup>[1-5]</sup>. 对比时间触发机制, 事件触发机制通过抑制控制信号更新的频率, 减少控制信号发往执行器的次数, 可以保证更长的触发间隔和更高的资源利用率, 从而在减少网络通信资源的情况下实现类似的控制性能. 文献[6] 针对四旋翼无人机系统提出一种自适应事件触发控制方法. 此外, 上述文献使用了静态事件触发机制, 后来又提出了动态事件触发机制 (DETM). 与静态事件触发制相比, 动态事件触发机制能够根据实际情况动态地调节控制器中的数据是否被发送. 因此, DETM 近来获得了很多研究人员的关注<sup>[7, 8]</sup>. 我们研究团队针对一类具有注入和欺骗攻击的随机非线性系统, 提出了一种自适应动态事件触发控制方案<sup>[9]</sup>.

在实际应用中, 许多系统容易受到时滞的影响, 从而影响系统的稳定性<sup>[10]</sup>. 因此, 研究时滞系统具有十分重要的意义, 文献[11-14] 提出了许多可行的方法来处理时间延迟. Xie 等<sup>[11]</sup> 针对一类具有时间延迟的不确定非线性系统, 进行了自适应事件触发有限时间控制的研究. Liu 等<sup>[14]</sup> 针对一种存在输入延迟的不确定非线性系统, 提出一种神经网络自适应跟踪控制的解决方案.

近年来, 有限时间控制因其快速的收敛速度而受到学术界的广泛关注. 最早引入有限时间控制概念的研究可以追溯到文献[15] 中的时间最优控制, 其收敛时间取决于系统的初始条件. Li 等<sup>[16]</sup> 研究了受全状态约束和死区影响的严格反馈非线性系统的自适应有限时间跟踪控制问题. 但许多实际应用中, 提前获取系统的初始值可能是困难的, 这使得无法精确的控制系统的稳定时间. 因此, 文献[17] 提出了一种固定时间控制算法, 该算法使系统的收敛时间不依赖于系统初始信息. 不同于有限时间稳定性, 固定时间控制算法具有更快的收敛速度, 并且可以估计到达稳定时间的上界<sup>[18]</sup>. 文献[19] 针对具有外部扰动和参数不确定性的多四旋翼无人机, 提出了基于指令滤波反步方法的分布式固定时间自适应编队控制算法. 尽管现有的固定时间稳定性理论可以通过适当地配置控制参数使系统状态在期望的时间内收敛到零, 但在任意时间实现收敛仍是一个极其困难的任务.

然而, 针对一些对时间要求严格的系统, 如导弹拦截系统, 需要在规定的时间内实现系统稳

定. 因此, 大量文献致力于研究自定义收敛时间<sup>[20-23]</sup>. Wang 等<sup>[20]</sup> 采用事件触发机制和指数型李雅普诺夫函数, 开发了一种规定时间性能 (PTP) 控制算法来解决一类非线性系统的多约束和不确定性问题. Hua 等<sup>[22]</sup> 首次提出了一个规定时间稳定性定理, 在此定理的基础上, 针对具有未知参数的高阶非线性系统, 提出了一种新的状态反馈控制策略, 利用反推法保证了系统在规定时间内收敛性. Li 和 Krstic<sup>[24]</sup> 提出了一类随机非线性严格反馈系统的规定时间输出反馈控制方案来解决稳定性问题, 但该方法的系统模型不包含未知不确定时滞. 因此, 针对一类包含不确定时滞的非线性系统, 提出一种预定义时间动态事件触发控制策略势在必行.

本文的主要贡献如下: 1) 针对一类具有不确定时滞的非线性系统, 提出了一种新的自适应规定时间稳定性定理. 此外, 规定时间与系统初始条件无关, 可根据实际需要进行预置; 2) 基于上述动态事件触发控制器, 可以利用较少的通信资源解决系统稳定性问题; 3) 在规定的时间内, 闭环系统中所有的控制信号都是有界的. 我们在本文中提出的控制策略能够使系统在预定时间内达到稳定状态, 而且系统的收敛时间并不会受到系统初始状态和控制参数的影响.

## 2 问题描述及预备知识

### 2.1 系统描述

考虑以下非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + h_i(\bar{x}_i(t-d(t))), \\ \dot{x}_n = u + f_n(\bar{x}_n) + h_n(\bar{x}_n(t-d(t))), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中,  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$  是系统状态变量,  $y \in R$  是系统的输出,  $u$  是系统控制输入;  $d(t)$  为 Borel 可测非负时变时滞;  $f_i(\cdot)$  和  $h_i(\bar{x}_i(t-d(t)))$  是光滑的未知函数, 且  $f_i(0) = h_i(0) = 0$ .

控制目标: 针对不确定非线性系统 (2.1), 设计了一种基于动态事件触发机制的自适应神经网络规定时间控制器. 使严格反馈系统 (2.1) 在规定时间内  $T_u$  内稳定 ( $T_u > 0$ ), 且系统中所有信号保持有界.

为简单起见,  $h_i(\bar{x}_i(t-d(t)))$  可以被写作  $h_{i,d}$ .

**引理 1**<sup>[22]</sup> 对于  $\forall x \in R^n$  和  $\forall t \in [0, T_u]$ , 如果满足下列条件, 系统 (2.1) 是规定时间稳定的:

$$\begin{aligned} V(t) &= V_a(x(t)) + V_b(\Psi(t)), \quad \xi_1(\|x\|) \leq V_a(x(t)) \leq \xi_2(\|x\|), \\ \xi_3(\|\Psi\|) &\leq V_b(\Psi(t)) \leq \xi_4(\|\Psi\|), \quad \dot{V}(t) \leq -c\mu V_a(x(t)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中,  $V_a(x(t))$  和  $V_b(\Psi(t))$  是正的连续可导函数,  $\xi_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 是  $K_\infty$  类函数.  $\mu$  在式 (3.1) 中定义,  $c \in (0, \infty)$ .

为了达到上述控制目标, 我们提出以下假设:

**假设 1** 状态时滞  $d(t)$  满足:  $d(t) < \Delta$ , 且  $d(t) < \gamma < 1$ , 其中  $\gamma$  和  $\Delta$  均为正常数.

**假设 2**<sup>[21]</sup> 对于  $1 \leq i \leq n$ , 存在正未知光滑函数  $\omega_{il}(\bar{z}_l + \bar{\alpha}_{l-1})$  使得

$$|h_{i,d}(\bar{x}_i)| \leq \sum_{l=1}^i |z_l| \omega_{il}(\bar{z}_l + \bar{\alpha}_{l-1}), \quad (2.3)$$

其中,  $\bar{z}_l = [z_1, z_2, \dots, z_l]^T$ ,  $\bar{\alpha}_l = [\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}]^T$  以及  $\alpha_0 = 0$ .

## 2.2 神经网络

**引理 2** <sup>[1]</sup> 本文利用径向基函数神经网络 (RBFNNs) 来逼近控制系统中存在的未知函数, 在紧集  $\Omega_S \in R^n$  上,

$$F(S) = \Phi^T \varphi(S) + \varepsilon(S), \quad (2.4)$$

其中,  $F(S)$  是待逼近的未知连续函数,  $S \in \Omega_S$  为径向神经网络的输入向量.  $\Phi \in R^{\varrho}$  是径向基神经网络的最优权重向量. 神经网络中有  $\varrho$  个神经元, 其中  $\varrho > 1$ .  $\varphi(S) = [\beta_1(S), \beta_2(S), \dots, \beta_{\varrho}(S)]^T$  是基函数向量, 其  $\beta_i(S)$  代表高斯函数, 可以表示为

$$\beta_i(S) = \exp \left[ -\frac{(S - p_{ci})^T (S - p_{ci})}{p_{di}^2} \right], \quad (2.5)$$

其中  $p_{ci} = [p_{ci1}, p_{ci2}, \dots, p_{cin}]^T$  表示中心向量,  $p_{di}$  是高斯函数的宽度. 估计误差为  $\varepsilon(S) = F(S) - \hat{F}(\hat{S}|\Phi)$ . 设  $\varepsilon(S)$  有一个上限  $\bar{\varepsilon} > 0$  且满足  $|\varepsilon(S)| \leq \bar{\varepsilon}$ .

## 2.3 重要引理

**引理 3** <sup>[9]</sup> 对于任意实数  $a$  和  $b$ , 下列不等式成立:

$$ab \leq \frac{m^{q_0}}{q_0} |a|^{q_0} + \frac{1}{q_1 m^{q_1}} |b|^{q_1}, \quad (2.6)$$

其中,  $m > 0$ ,  $q_0 > 1$ ,  $q_1 > 1$ ,  $(q_0 - 1)(q_1 - 1) = 1$ .

**引理 4** <sup>[25]</sup> 对于任意  $v_i \geq 0$ ,  $b > 1$ , 下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^k v_i^b \geq k^{1-b} \left( \sum_{i=1}^k v_i \right)^b. \quad (2.7)$$

## 2.4 动态事件触发机制

为了减少系统通信资源的使用, 采用了 DETM

$$u(t) = \omega(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (2.8)$$

$$t_{k+1} = \inf\{t \in R | |e_u(t)| \geq \chi(t) + k_0|u(t)| + k_1\}, \quad (2.9)$$

其中,  $t_k, t_{k+1} \in Z^+$ ,  $k_0 \in (0, 1)$ ,  $k_1 \in (0, +\infty)$ .  $\omega(t)$  表示控制算法发出的实际的控制信号,  $e_u(t) = \omega(t) - u(t)$ . DETM 内的动态触发因子  $\chi(t)$  的形式如下:

$$\dot{\chi}(t) = -v\chi + k_1|u(t)| + k_0 - |e_u(t)|, \quad \chi(0) = \hat{\chi}, \quad (2.10)$$

其中,  $v$  和  $\hat{\chi}$  都是待设计的正常数. 根据上述公式, 很容易可以证明:  $\forall t \in [0, \infty)$ ,  $\chi(t) > 0$ .

然后, 对于时间区间  $t \in [t_k, t_{k+1})$  内, 有

$$\omega(t) = \chi + (1 + K_0(t)k_0)u(t) + K_1(t)k_1 \quad (2.11)$$

和

$$u(t) = \frac{\omega - \chi - K_1(t)k_1}{1 + K_0(t)k_0}, \quad (2.12)$$

其中,  $K_0(t)$ ,  $K_1(t)$  是两个未知的时变连续函数, 且满足  $|K_0(t)| \leq 1$ ,  $|K_1(t)| \leq 1$ ,  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ .

**注 1** 由式 (2.9) 可以看出, 动态事件触发机制在静态事件触发机制的基础上增加了一个动态变量  $\chi(t)$ . 此变量可以自适应地发生变化, 动态地调节触发阈值, 使得触发阈值不再是一个固定值. 动态事件触发机制能够减少控制器的触发频率, 在一定程度上极大地节省了控制资源.

### 3 主要结果

#### 3.1 规定时间动态事件触发控制器设计

本节基于反步法, 提出了一类动态事件触发自适应规定时间控制器. 为了便于分析, 下面将设计过程分为两部分:  $t \in [0, T_u)$  和  $t \in [T_u, +\infty)$ .

为了实现 PTP, 选择缩放函数  $\mu(t)$  为

$$\mu(t) = \frac{\sigma}{T_u - t}, \quad t \in [0, T_u), \quad (3.1)$$

其中,  $\sigma \in (0, +\infty)$ .

**情况 1** 对于  $t \in [0, T_u)$ , 令

$$\begin{cases} z_1 = x_1, \\ z_i = x_i - \alpha_{i-1}, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中,  $\alpha_{i-1}$  是虚拟控制器, 会在后续的过程中设计,  $i = 2, 3, \dots, n$ .

**步骤 1** 基于式 (2.1) 和 (3.2) 有

$$\dot{z}_1 = x_2 + f_1(x_1) + h_1(\bar{x}_1(t-d(t))) = z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) + h_{1,d}. \quad (3.3)$$

为了保证系统 (2.1) 的 PTP, 将李雅普诺夫候选函数设计为

$$V_1 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2c_1}\tilde{\psi}_1^2 + \frac{1}{2b_1}\tilde{\rho}_1^2, \quad (3.4)$$

其中, 自适应律  $\hat{\psi}_i$  和  $\hat{\rho}_i$  是  $\psi_i$  和  $\rho_i$  的估计, 其设计形式将在后续给出, 且满足  $\tilde{\psi}_i = \psi_i - \hat{\psi}_i$ ,  $\tilde{\rho}_i = \rho_i - \hat{\rho}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 结合式 (3.3), 有

$$\dot{V}_1 = z_1(z_2 + \alpha_1 + f_1(x_1) + h_{1,d}) - \frac{1}{c_1}\tilde{\psi}_1\dot{\hat{\psi}}_1 - \frac{1}{b_1}\tilde{\rho}_1\dot{\hat{\rho}}_1. \quad (3.5)$$

用 RBFNNs 来逼近未知非线性函数  $F_1(S_1) = f_1 + \phi_1$  为

$$F_1(S_1) = \Phi_1^T \varphi_1(S_1) + \varepsilon_1(S_1), \quad (3.6)$$

其中,  $S_1 = [x_1]^T$ ,  $|\varepsilon_1(S_1)| \leq \rho_1$  和

$$\phi_1 = \frac{\delta_1}{1-\gamma} \exp(\Delta) \frac{z_1}{2q_{11}^2(\bar{x}_1)}, \quad (3.7)$$

其中,  $\delta_i$ ,  $q_{ij}(\cdot)$  是设计参数, 会在后续给出,  $\gamma$  是正常数.

应用 Young 不等式和式 (2.6), 进一步可得

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &\leq \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2, \quad z_1 h_{1,d} \leq \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}h_{1,d}^2, \\ z_1 \Phi_1^T \psi_1(S_1) &\leq \frac{1}{2\iota_1}z_1^2 \Psi_1 \varphi_1^T \varphi_1 + \frac{\iota_1}{2}, \quad z_1 \varepsilon_1(S_1) \leq \frac{1}{2\iota_1}z_1^2 \rho_1 + \frac{\iota_1}{2}\rho_1, \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中,  $\Psi_i = \Phi_i^T \Phi_i = \|\Phi_i\|^2$ , 为了实现控制系统的控制目标, 设计如下形式的虚拟控制器和自适应律:

$$\alpha_1 = -(\mu + 1)z_1 - \frac{1}{2\iota_1}z_1 \left( \hat{\psi}_1 \varphi_1^T \varphi_1 + \hat{\rho}_1 \right), \quad (3.9)$$

$$\dot{\hat{\psi}}_1 = \frac{c_1}{2\iota_1}z_1^2 \psi_1^T \psi_1, \quad (3.10)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_1 = \frac{b_1}{2\iota_1}z_1^2, \quad (3.11)$$

将式 (3.6)–(3.11) 代入式 (3.5), 可得

$$\dot{V}_1 \leq -\mu z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 - z_1 \phi_1 + \frac{1}{2} h_{1,d}^2 + C_1, \quad (3.12)$$

其中,  $C_1 = \frac{1}{2} \iota_1 (1 + \rho_1)$ .

步骤  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) 基于式 (2.1) 和 (3.2) 有

$$\dot{z}_i = x_{i+1} + f_i(\bar{x}_i) + h_{i,d} - \dot{\alpha}_{i-1} = z_{i+1} + \alpha_i + f_i(\bar{x}_i) + h_{i,d} - \dot{\alpha}_{i-1}, \quad (3.13)$$

其中,  $\dot{\alpha}_{i-1}$  定义如下:

$$\dot{\alpha}_{i-1} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (f_j + x_{j+1} + h_{j,d}) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\Psi}_j} \dot{\hat{\Psi}}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_j} \dot{\hat{\rho}}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t}, \quad (3.14)$$

选择李雅普诺夫候选函数设计为

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2c_i} \Psi_i^2 + \frac{1}{2b_i} \hat{\rho}_i^2. \quad (3.15)$$

结合式 (3.13), 进一步可得

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i(z_{i+1} + \alpha_i + f_i(\bar{x}_i) + h_{i,d} - \dot{\alpha}_{i-1}) - \frac{1}{c_i} \tilde{\Psi}_i \dot{\hat{\Psi}}_i - \frac{1}{b_i} \tilde{\rho}_i \dot{\hat{\rho}}_i. \quad (3.16)$$

用 RBFNNs 来逼近位置非线性函数  $F_i(S_i)$  为

$$\begin{aligned} F_i(S_i) &= f_i + \phi_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial x_j} (f_j + x_{j+1} + h_{j,d}) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\Psi}_j} \dot{\hat{\Psi}}_j - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \hat{\rho}_j} \dot{\hat{\rho}}_j \\ &= \Phi_i^T \varphi_i(S_i) + \varepsilon_i(S_i), \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中,  $S_i = [x_1, \dots, x_i, \hat{\Psi}_1, \dots, \hat{\Psi}_i, \hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_i]^T$ ,  $|\varepsilon_i(S_i)| \leq \rho_i$  和

$$\phi_i = \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{1 - \gamma} \exp(\Delta) \frac{z_j}{2q_{ij}^2(\bar{x}_j)}. \quad (3.18)$$

应用 Young 不等式和式 (2.6), 进一步可得

$$\begin{aligned} z_i z_{i+1} &\leq \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2, \quad z_i h_{i,d} \leq \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} h_{i,d}^2, \\ z_i \Phi_i^T \psi_i(S_i) &\leq \frac{1}{2\iota_i} z_i^2 \Psi_i \Phi_i^T \varphi_i + \frac{\iota_i}{2}, \quad z_i \varepsilon_i(S_i) \leq \frac{1}{2\iota_i} z_i^2 \rho_i + \frac{\iota_i}{2} \rho_i, \\ z_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} &\leq \frac{1}{2\iota_i} z_i^2 \left( \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\iota_i}{2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

选择

$$\alpha_i = - \left( \mu + \frac{3}{2} \right) z_i - \frac{z_i}{2\iota_i} \left( \hat{\Psi}_i \Phi_i^T \varphi_i + \hat{\rho}_i + \left( \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial t} \right)^2 \right), \quad (3.20)$$

$$\dot{\hat{\Psi}}_i = \frac{c_i}{2\iota_i} \psi_i^T \psi_i z_i^2, \quad (3.21)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_i = \frac{c_i}{2\iota_i} z_i^2, \quad (3.22)$$

将式 (3.17)–(3.22) 代入式 (3.16), 可得

$$\dot{V}_i \leq \dot{V}_{i-1} - \mu z_i^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2 - z_i \phi_i + \frac{1}{2} h_{i,d}^2 + \frac{\iota_i}{2} + \frac{\iota_i}{2} \rho_i \quad (3.23)$$

$$\leq -\mu \sum_{j=1}^i z_j^2 + \frac{1}{2} z_{i+1}^2 - \sum_{j=1}^i z_j \phi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i h_{j,d}^2 + C_i,$$

其中,  $C_i = C_{i-1} + \frac{1}{2} \iota_i (1 + \rho_i)$ .

步骤  $n$  基于式 (2.1) 和 (3.2) 有

$$\dot{z}_n = \dot{x}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = u + f_n(\bar{x}_n) + h_{n,d} - \dot{\alpha}_{n-1}, \quad (3.24)$$

其中,  $\dot{\alpha}_{n-1}$  定义如下:

$$\dot{\alpha}_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (f_j + x_{j+1} + h_{j,d}) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\psi}_j} \dot{\hat{\psi}}_j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_j} \dot{\hat{\rho}}_j + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t}, \quad (3.25)$$

选择李雅普诺夫候选函数设计为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2c_n} \tilde{\psi}_n^2 + \frac{1}{2b_n} \tilde{\rho}_n^2, \quad (3.26)$$

结合式 (3.24) 有

$$\dot{V}_n = \dot{V}_{n-1} + z_n \left( \frac{\omega - K_1 k_1}{1 + K_0 k_0} + f_n(\bar{x}_n) + h_{n,d} - \dot{\alpha}_{n-1} \right) - \frac{1}{c_n} \tilde{\psi}_n \dot{\hat{\psi}}_n - \frac{1}{b_n} \tilde{\rho}_n \dot{\hat{\rho}}_n. \quad (3.27)$$

用 RBFNNs 来逼近位置非线性函数  $F_i(S_i)$  为

$$\begin{aligned} F_n(S_n) &= f_n + \phi_n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial x_j} (f_j + x_{j+1} + h_{j,d}) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\psi}_j} \dot{\hat{\psi}}_j - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \hat{\rho}_j} \dot{\hat{\rho}}_j \\ &= \Phi_n^T \varphi_n(S_n) + \varepsilon_n(S_n), \end{aligned} \quad (3.28)$$

其中,  $S_n = [x_1, \dots, x_n, \hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_n, \hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n]^T$ ,  $|\varepsilon_n(S_n)| \leq \rho_n$  和

$$\phi_n = \sum_{j=1}^n \frac{\delta_n}{1 - \gamma} \exp(\Delta) \frac{z_n}{2q_{nj}^2(\bar{x}_j)}. \quad (3.29)$$

应用杨氏不等式和式 (2.6), 进一步可得

$$\begin{aligned} z_n h_{n,d} &\leq \frac{1}{2} z_n^2 + \frac{1}{2} h_{n,d}^2, \quad z_n \Phi_n^T \psi_n(S_n) \leq \frac{1}{2\iota_n} z_n^2 \Psi_n \varphi_n^T \varphi_n + \frac{\iota_n}{2}, \\ z_n \varepsilon_n(S_n) &\leq \frac{1}{2\iota_n} z_n^2 \rho_n + \frac{\iota_n}{2} \rho_n, \quad z_n \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} \leq \frac{1}{2\iota_n} z_n^2 \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} \right)^2 + \frac{\iota_n}{2}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

因为

$$\left| \frac{K_1 k_1}{1 + K_0 k_0} \right| \leq \frac{k_1}{1 - k_0}, \quad (3.31)$$

有

$$z_n \left| \frac{K_1 k_1}{1 + K_0 k_0} \right| \leq \frac{1}{2\iota_n} z_n^2 \left( \frac{k_1}{1 - k_0} \right)^2 + \frac{\iota_n}{2}, \quad (3.32)$$

$$z_n \left| \frac{-\chi}{1 + K_0 k_0} \right| \leq \frac{z_n^2 \chi^2}{2\iota_n} \left( \frac{k_1}{1 - k_0} \right)^2 + \frac{\iota_n}{2}. \quad (3.33)$$

选择

$$\omega = -(1 + k_0) \left( (\mu + 1) z_n + \frac{z_n}{2\iota_n} \left( \hat{\psi}_n \varphi_n^T \varphi_n + \hat{\rho}_n + \left( \frac{k_1}{1 - k_0} \right)^2 (1 + \chi^2) \right) \right)$$

$$+ \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial t} \right)^2 \Bigg), \quad (3.34)$$

$$\dot{\hat{\psi}}_n = \frac{c_n}{2\iota_n} \varphi_n^T \varphi_n z_n^2, \quad (3.35)$$

$$\dot{\hat{\rho}}_n = \frac{b_n}{2\iota_n} z_n^2. \quad (3.36)$$

因为  $z_n \omega < 0$ , 进一步可得

$$\frac{z_n \omega}{1 + K_0 k_0} \leq \frac{z_n \omega}{1 + k_0}. \quad (3.37)$$

将式 (3.28)–(3.37) 代入 (3.27), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq \dot{V}_{n-1} - \mu z_n^2 - z_n \phi_n + \frac{1}{2} h_{n,d}^2 + \iota_n + \frac{\iota_n}{2} \rho_n \\ &\leq -\mu \sum_{j=1}^n z_j^2 - \sum_{j=1}^n z_j \phi_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n h_{j,d}^2 + C_n, \end{aligned} \quad (3.38)$$

其中,  $C_n = C_{n-1} + \frac{1}{2} \iota_n (4 + \rho_n)$ . 根据假设 2 和引理 4 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n h_{j,d}^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i z_j(t-d(t)) q_{ij}(\bar{x}_j(t-d(t))) \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{1}{i-3} z_j^2(t-d(t)) q_{ij}^2(\bar{x}_j(t-d(t))) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{2} (z_j^2(t-d(t)) q_{ij}^2(\bar{x}_j(t-d(t)))) , \end{aligned} \quad (3.39)$$

其中,  $\delta_i = \frac{1}{i-3}$ ,  $q_{ij}(\cdot)$  是未知的正函数. 设计如下的对称正定李雅普诺夫函数  $\bar{V}_n$ :

$$\bar{V}_n = V_n + V_Q, \quad (3.40)$$

其中,  $V_Q$  是李雅普诺夫-克拉索夫斯基 (Lyapunov-Krasovskii) 函数, 定义为

$$V_Q = \frac{1}{1-\gamma} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \delta_i \exp(d(t)-t) \int_{t-d(t)}^t \exp(\tau) \frac{1}{2} z_j^2(\tau) q_{ij}^2(\bar{x}_j(\tau)) d\tau. \quad (3.41)$$

式 (3.41) 关于时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_Q &\leq (\dot{d}(t) - 1) V_Q + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{1-\gamma} \exp(d(t)) \frac{z_j^2}{2 q_{ij}^2(\bar{x}_j)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{1-\gamma} (1 - \dot{d}(t)) \frac{z_j^2(t-d(t))}{2 q_{ij}^2(\bar{x}_j(t-d(t)))} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{1-\gamma} \exp(d(t)) \frac{z_j^2}{2 q_{ij}^2(\bar{x}_j)} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{\delta_i}{2} z_j^2(t-d(t)) q_{ij}^2(\bar{x}_j(t-d(t))). \end{aligned} \quad (3.42)$$

结合式 (3.38)–(3.42) 和  $\phi_i$  的定义, 有

$$\dot{\bar{V}}_n = \dot{V}_n + \dot{V}_Q \leq -\mu z_n^2 + C_n, \quad (3.43)$$

其中,  $C_n = \sum_{j=1}^n \frac{\iota_j}{2} (1 + \rho_j) + \iota_n$ .

**情况 2** 对于  $t \in [T_u, +\infty)$ , 控制器和自适应率设计如下:

$$u = u(T_u), \quad \hat{\Phi}_i = 0, \quad \dot{\hat{\rho}}_i = 0, \quad (3.44)$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

### 3.2 稳定性分析

对于一类具有时滞的严格反馈非线性系统 (2.1), 通过选择合适的自适应率 (3.10)–(3.11), (3.21)–(3.22) 和 (3.35)–(3.36), 虚拟控制器 (3.9), (3.20), 动态事件触发控制器 (3.34). 在假设 1 和假设 2 都满足的情况下, 在选择合适的控制参数后, 闭环系统 (2.1) 在自定义时间  $T_u$  内达到稳定状态, 且闭环系统内的所有信号保持有界.

证 令  $V_a = \sum_{i=1}^n z_i^2$ ,  $V_b = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\rho}_i^2 + V_Q$ ,  $\bar{V} = V_a + V_b$ . 因为式 (2.2) 和式 (3.43), 系统 (2.1) 的预定义时间稳定性可以被证明.

可以证明  $\bar{V}$  的依概率有界性, 继而得出  $z_j, \tilde{\rho}_j, \tilde{\Psi}_j, j = 1, 2, \dots, n$  的依概率有界性. 再根据  $\hat{\rho}_j = \rho_j - \tilde{\rho}_j$ , 得到  $\hat{\rho}_j$  依概率有界.  $\mu$  的有界性可以被证明. 因此,  $\hat{\Psi}_j, \hat{\rho}_j, \alpha_j$  的有界性可以得到保证. 最后, 我们得到  $\omega, u$  依概率有界, 至此, 系统 (2.1) 内所有信号的有界性证明完毕.

本节并不存在 Zeno 行为, 下面给出分析过程. 令事件触发间隔的最小值为  $t^* \leq t_{k+1} - t_k$ , 其中  $k \in N^+$ . 对于  $\forall t \in [t_k, t_{k+1})$ , 由  $e_u(t) = \omega(t) - u(t)$  得  $\frac{d}{dt}|e_u| = \text{sign}(e_u(t))\dot{e}_u(t) \leq |\dot{\omega}(t)|$ . 通过以上结论, 我们可以得到  $\dot{\omega}(t)$  是有界的, 则存在一个正常数  $\bar{\omega}$  满足等式  $\dot{\omega}(t) < \bar{\omega}$ . 由  $e_u(t_k) = 0$  和  $\lim_{t \rightarrow t_{k+1}} e_u(t) = \chi + k_0|u(t)| + k_1$  可得  $t^* \geq (\chi + k_0|u(t)| + k_1)/\bar{\omega}$ . 也就是说, 本节的设计方法避免了 Zeno 行为的出现.

## 4 仿真实验

为了验证动态事件触发定时自适应神经控制器的优秀控制性能, 进行了仿真实验. 介绍以下金属切削系统:

$$m\ddot{l} + c\dot{l} + kl = F_\Delta + k_a u, \quad (4.1)$$

式中  $l$  为切削深度,  $k_a$  是等效弹簧刚度,  $u$  是压电致动器的输出,  $k$  是弹簧刚度,  $c$  是阻尼系数,  $m$  为金属切割机的质量;  $F_\Delta = h \times (l - \eta l(t-d)) + f(l - \eta l(t-d))$  表示机床的切削力变化. 金属切削系统 (4.1) 可重写为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{k_a}{m}u - \frac{c}{m}x_2 - \frac{k-h}{m}x_1 - \frac{h\eta}{m}x_1(t-d) + \frac{1}{m}f(x_1 - \eta x_1(t-d)), \\ y = x_1, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中,  $x_1 = l, x_2 = \dot{l}$ . 令  $k_a = 2.5, m = 50 \text{ kg}, c = 10, k = 500 \text{ N/m}, h = 200, \mu = 1, f(x_1 - \eta x_1(t-d)) = 20 \sin(x_1 - \eta x_1(t-d)), d = 1 + 0.5 \sin(t)$ . 为了验证本文所提出控制策略的有效性, 给出了三个具有不同规定时间  $T_u$  的控制实例, 且在不同实例中被控系统保持相同. 因此, 系统的初始状态值为  $x_1(0) = 0.2, x_2(0) = 0.2$ .

利用粒子群算法探索最优参数方案, PSO 算法<sup>[26]</sup>中有  $j$  个粒子, 需要进行  $n$  次迭代计算.

基于粒子群算法, 计算所选范围内的最优参数组合. 当  $T_u = 7$  时, 参数的选择如下:

$$\begin{cases} a_1 = 1.7655, & a_2 = 3.7973, & b_1 = 2.2080, & b_2 = 1.4350, \\ c_1 = 4.1048, & c_2 = 4.7934, & \sigma = 0.01, \\ \iota_1 = 1.7655e^{-0.2t}, & \iota_2 = 3.7973e^{-0.18t}, \\ k_0 = 0.9, & k_1 = 2.5. \end{cases} \quad (4.3)$$

在第一个神经网络中  $\Phi_1^T \varphi_1(\hat{x}_1)$ ,  $\varrho_1 = 3$ ,  $p_{d1} = 1.3$ , 中心向量为  $[-3, 3]$ . 在第二个神经网络中  $\Phi_2^T \varphi_2(\hat{x}_2)$ ,  $\Phi_2^T \varphi_2(\hat{x}_2)$ ,  $\varrho_2 = 3^6$ ,  $p_{d2} = 1.63$ . 中心向量为  $[-4, 4] \times [-1.5, 1.5] \times [-1, 1] \times [-3, 3] \times [-2.5, 2.5] \times [-6, 6]$ .

实验结果如图 1-5 所示. 图 1 为不同规定收敛时间  $T_u$  下输出信号  $x_1$  的调整图, 可以看出, 在不同规定收敛时间  $T_u$  下, 系统 (4.2) 达到了预定时间收敛的性能, 同时很明显地可以看出系统在 4 秒内达到了稳定状态, 其收敛时间并不受初始状态选择的影响. 图 2-3 为  $T_u = 7$  时的自适应规律轨迹.  $u$  和  $w$  的区别可以在图 4 中直观地看到. 因此, 系统 (4.2) 中信号的有界性如图 1-4 所示.

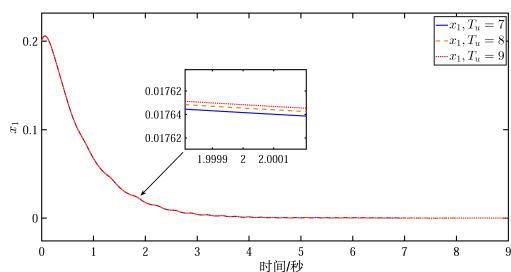


图 1 不同  $T_u$  下  $x_1$  的轨迹

(Figure 1 Trajectories of  $x_1$  with different  $T_u$ )

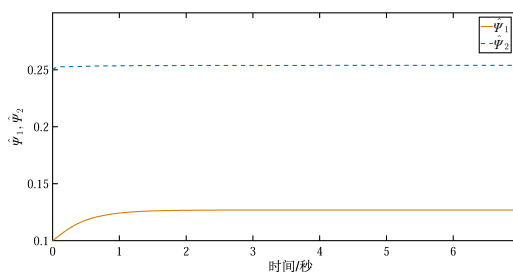


图 2  $\hat{\psi}_1$  和  $\hat{\psi}_2$  的轨迹

(Figure 2 Trajectories of  $\hat{\psi}_1$  and  $\hat{\psi}_2$ )

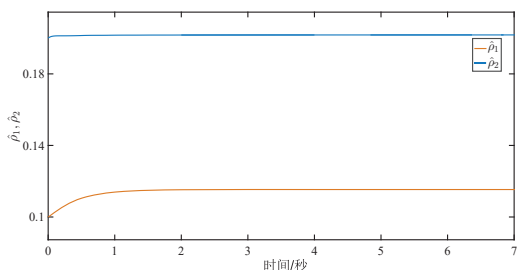


图 3  $\hat{\rho}_1$  和  $\hat{\rho}_2$  的轨迹

(Figure 3 Trajectories of  $\hat{\rho}_1$  and  $\hat{\rho}_2$ )

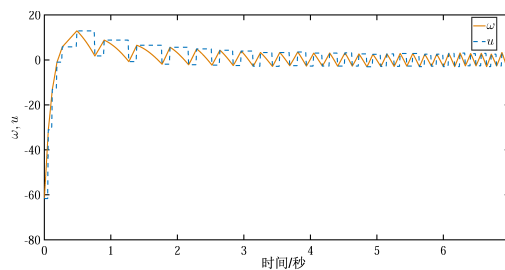


图 4  $\omega$  和  $u$  的轨迹

(Figure 4 Trajectory of  $\omega$  and  $u$ )

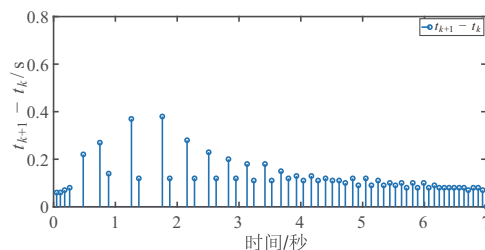


图 5 触发间隔时间

(Figure 5 Trigger interval time)

图 5 表示动态事件触发机制下的触发间隔时间. 在实验中, 选择固定步长为 0.01 秒. 因此, 7 秒内的触发次数为 56 次. 也就是说, 具有动态事件触发机制的自适应神经网络规定时间控制器为系统节省了约 92% 的通信资源. 可以得出结论, 与传统的时间触发控制相比, 动态事件触发机制能够以更低的成本更有效地促进系统收敛.

## 5 结 论

本文研究了一种具有状态延迟的非线性严格反馈系统, 并设计了一种基于动态事件触发机制的自适应神经网络控制器, 使得系统能在预定时间内实现稳定. 针对所提出的控制方案, 提出了粒子群算法, 系统地计算控制参数, 获得更好的控制性能. 我们设计的动态事件触发控制器确保了闭环系统中所有信号的有界性. 最后, 通过实际的仿真实验验证所设计的规定时间控制器的可行性. 在未来, 我们将利用该控制方案来解决一些更复杂系统的渐近跟踪控制问题, 如随机非线性系统、切换非线性系统等.

## 参 考 文 献

- [1] Li Y X, Yang G H. Adaptive neural control of pure-feedback nonlinear systems with event-triggered communications. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2018, **29**(12): 6242–6251.
- [2] Cao L, Li H Y, Dong G W, et al. Event-triggered control for multiagent systems with sensor faults and input saturation. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019, **51**(6): 3855–3866.
- [3] Yao Y G, Tan J Q, Wu J, et al. Event-triggered fixed-time adaptive fuzzy control for state-constrained stochastic nonlinear systems without feasibility conditions. *Nonlinear Dynamics*, 2021, **105**(1): 403–416.
- [4] Xia J W, Li B M, Su S F, et al. Finite-time command filtered event-triggered adaptive fuzzy tracking control for stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, **29**(7): 1815–1825.
- [5] Li H Y, Chen Z R, Wu L G, et al. Event-triggered fault detection of nonlinear networked systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **47**(4): 1041–1052.
- [6] 曹澄洁, 赵中原, 邓志良. 四旋翼无人机飞行姿态自适应事件触发控制算法. 控制工程, 2023, 1–9. DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20220985.  
(Cao C J, Zhao Z Y, Deng Z L. Adaptive event-triggered attitude control algorithm for quadrotor unmanned aerial vehicle. *Control Engineering of China*, 2023, 1–9. DOI: 10.14107/j.cnki.kzgc.20220985.)
- [7] Ge X H, Han Q L, Wang Z D. A dynamic event-triggered transmission scheme for distributed set-membership estimation over wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **49**(1): 171–183.
- [8] Liu Q Y, Wang Z D, He X, et al. Event-based recursive distributed filtering over wireless sensor networks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, **60**(9): 2470–2475.
- [9] Wu J, He F R, He X G, et al. Dynamic event-triggered fuzzy adaptive control for non-strict-feedback stochastic nonlinear systems with injection and deception attacks. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2023, **25**(3): 1144–1155.
- [10] 张冬梅, 俞立. 线性时滞系统稳定性分析综述. 控制与决策, 2008, (8): 841–849.  
(Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems. *Control and Decision*, 2008, (8): 841–849.)

- [11] Xie Y, Ma Q, Xu S. Adaptive event-triggered finite-time control for uncertain time delay nonlinear system. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(9): 5928–5937.
- [12] Chen X M, Wu Z W, Li J, et al. Adaptive asymptotic regulation for uncertain nonlinear stochastic systems with time-varying delays. *Symmetry*, 2021, **13**(12): 2284.
- [13] Li Y F, Liu L, Hua C C, et al. Event-triggered/self-triggered leader-following control of stochastic nonlinear multi-agent systems using high-gain method. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, **51**(6): 2969–2978.
- [14] Liu J, Zhang Y L, Yu Y, et al. Fixed-time leader-follower consensus of networked nonlinear systems via event/self-triggered control. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2020, **31**(11): 5029–5037.
- [15] Athans M, Falb P L. Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications. New York: McGraw-Hill, 2007.
- [16] Li H Y, Zhao S Y, He W, et al. Adaptive finite-time tracking control of full state constrained nonlinear systems with dead-zone. *Automatica*, 2019, **100**: 99–107.
- [17] Polyakov A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, **57**(8): 2106–2110.
- [18] Liu Y, Li H Y, Lu R Q, et al. An overview of finite/fixed-time control and its application in engineering systems. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, 2022, **9**(12): 2106–2120.
- [19] 徐辉, 崔国增, 李泽. 多四旋翼无人机分布式固定时间自适应编队控制. *系统科学与数学*, 2022, **42**(9): 2245–2257.  
(Xu H, Cui G Z, Li Z. Distributed fixed-time adaptive formation control for multiple QAVs. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2022, **42**(9): 2245–2257.)
- [20] Wang Z W, Lam H K, Xiao B, et al. Event-triggered prescribed-time fuzzy control for space teleoperation systems subject to multiple constraints and uncertainties. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2020, **29**(9): 2785–2797.
- [21] Zhou Q, Shi P, Xu S, et al. Observer-based adaptive neural network control for nonlinear stochastic systems with time delay. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2012, **24**(1): 71–80.
- [22] Hua C, Ning P, Li K. Adaptive prescribed-time control for a class of uncertain nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **67**(11): 6159–6166.
- [23] Wang Z W, Liang B, Sun Y C, et al. Adaptive fault-tolerant prescribed-time control for teleoperation systems with position error constraints. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2019, **16**(7): 4889–4899.
- [24] Li W, Krstic M. Prescribed-time output-feedback control of stochastic nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, **68**(3): 1434–1446.
- [25] Zhu Z, Xia Y, Fu M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, **21**(6): 686–702.
- [26] Kennedy J, Eberhart R. Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN' 95-International Conference on Neural Networks, IEEE*, 1995, **4**: 1942–1948.